Lycée Sahline A.S :2010/2011

Devoir de contrôle N°4

Classes $4^{ème}$ sc

Durée: 2.h

Exercice N°1: (4 pts)

Soient les suites U et V définies, sur ℕ par $U_n = \int_0^1 x^n dx$ et $V_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx$

1/ Montrer que $U_n = \frac{1}{n+1}$ puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

2/a) Vérifier que pour tout $x \neq -1$; on a : $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$

b) Déduire V_1

c) Montrer que $V_{n+1} + V_n = U_n$

Calculer alors V_2 et V_3

Exercice N°2: (6 pts)

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = x e^{-x}$ et C_f sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$; on donne $\|\vec{i}\| = 2cm$

1/ Dresser le tableau de variation de f

2/ Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$, interpréter graphiquement le résultat.

3/ Donner une équation cartésienne de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0.

4/ Construire T et C_f

5/ Déterminer en cm^2 l'aire de la partie D du plan limité par C_f et les droites d'équations : $x = 0, x = 1, y = 0$

6/ Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0,1]$

a) Montrer que g réalise une bijection de $[0,1]$ sur un intervalle J que l'on déterminera

b) Construire $C_{g^{-1}}$ dans le même repère

c) Déterminer en cm^2 l'aire de la partie D' du plan limité par $C_{g^{-1}}$ et les droites d'équations $x = 0, y = 0, y = 1$

Exercice N°3: (5 pts)

Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{3}{2} \\ U_{n+1} = 1 + \sqrt{U_n - 1} \quad \text{pour tout n de } \mathbb{N} \end{cases}$

1/a) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $1 < U_n < 2$

b) Montrer que U est une suite strictement croissante

c) En déduire que U est convergente et déterminer sa limite L

2/ Soit V la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \ln(U_n - 1)$

a) Montrer que V est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

c) Retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

Exercice N°4: (5 pts)

L'espace ξ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1/ Déterminer une équation cartésienne de la sphère S de centre I(1 , -2 , 0) et de rayon R = 2

2/ Montrer que la sphère S est tangente au plan P : $x + 2y - 2z + 9 = 0$

3/ Soit Q le plan d'équation : $-2x + y - 1 = 0$

Déterminer $S \cap Q$

4/ a) Montrer que $P \perp Q$

b) Soit $D = P \cap Q$, montrer que $d(I, D) = 3$

5/ On considère les plans P_m d'équations : $mx + \ln(m) = 0$; $m \in [1, +\infty[$

a) Calculer $d(I, P_m)$

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(m) = 1 + \dfrac{\ln(m)}{m}$

c) Montrer que pour tout $m \in [1, +\infty[$, $P_m \cap S$ est un cercle